

## 第三课时 几何代数综合题

1. 已知：如图①，在矩形ABCD中， $AB=5$ ， $AD=\frac{20}{3}$ ， $AE \perp BD$ ，垂足是E.点F是点E关于AB的对称点，连接AF、BF.

(1) 求AE和BE的长；

(2) 若将 $\triangle ABF$ 沿着射线BD方向平移，设平移的距离为m（平移距离指点B沿BD方向所经过的线段长度）.当点F分别平移到线段AB、AD上时，直接写出相应的m的值.

(3) 如图②，将 $\triangle ABF$ 绕点B顺时针旋转一个角 $\alpha$ （ $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ），记旋转中的 $\triangle ABF$ 为 $\triangle A'B'F'$ ，在旋转过程中，设 $A'F'$ 所在的直线与直线AD交于点P.与直线BD交于点Q.是否存在这样的P、Q两点，使 $\triangle DPQ$ 为等腰三角形？若存在，求出此时DQ的长；若不存在，请说明理由.

解：(1) 在 $Rt\triangle ABD$ 中， $AB=5$ ， $AD=\frac{20}{3}$ ，

由勾股定理得： $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2} =$

$$\frac{25}{3}.$$

$$\because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AE = \frac{1}{2}AB \cdot AD,$$

$$\therefore AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{5 \times \frac{20}{3}}{\frac{25}{3}} = 4.$$

在 $Rt\triangle ABE$ 中， $AB=5$ ， $AE=4$ ，由勾股定理得： $BE=3$ .

(2) 设平移中的三角形为 $\triangle A'B'F'$ ，如答图2所示：

由对称点性质可知， $\angle 1 = \angle 2$ .

由平移性质可知， $AB \parallel A'B'$ ， $\angle 4 = \angle 1$ ， $BF = B'F' = 3$ .

①当点 $F'$ 落在AB上时， $\because AB \parallel A'B'$ ，

$$\therefore \angle 3 = \angle 4, \therefore \angle 3 = \angle 2,$$

$$\therefore BB' = B'F' = 3, \text{ 即 } m = 3;$$

②当点 $F'$ 落在AD上时， $\because AB \parallel A'B'$ ，

$$\therefore \angle 6 = \angle 2, \because \angle 1 = \angle 2, \angle 5 = \angle 1,$$

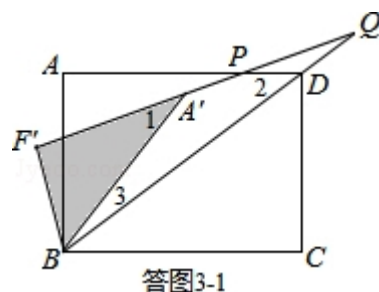
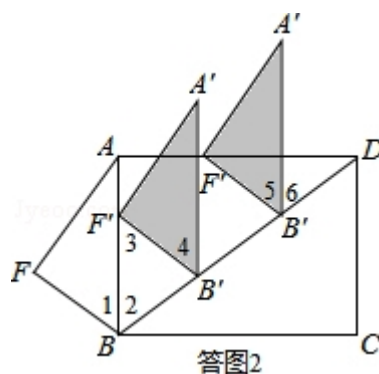
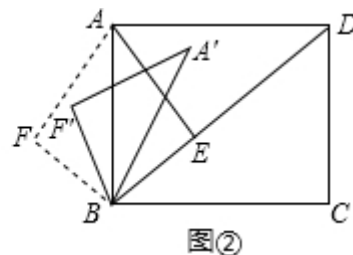
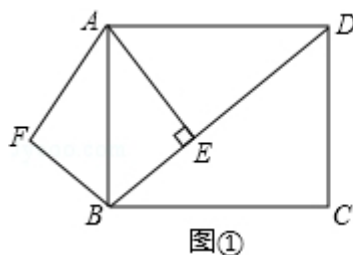
$$\therefore \angle 5 = \angle 6, \text{ 又易知 } A'B' \perp AD,$$

$\therefore \triangle B'F'D$ 为等腰三角形，

$$\therefore B'D = B'F' = 3,$$

$$\therefore BB' = BD - B'D = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3}, \text{ 即 } m = \frac{16}{3}.$$

(3) 存在. 理由如下：



在旋转过程中，等腰 $\triangle DPQ$ 依次有以下4种情形：

①如答图3-1所示，点 $Q$ 落在 $BD$ 延长线上，且 $PD=DQ$ ，易知 $\angle 2=2\angle Q$ ，

$$\because \angle 1 = \angle 3 + \angle Q, \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle Q,$$

$$\therefore A'Q = A'B = 5,$$

$$\therefore F'Q = F'A' + A'Q = 4 + 5 = 9.$$

在 $Rt\triangle BF'Q$ 中，由勾股定理得： $BQ = \sqrt{F'Q^2 + F'B^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ .

$$\therefore DQ = BQ - BD = 3\sqrt{10} - \frac{25}{3};$$

②如答图3-2所示，点 $Q$ 落在 $BD$ 上，且 $PQ=DQ$ ，易知 $\angle 2 = \angle P$ ，

$$\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 1 = \angle P,$$

$\therefore BA' \parallel PD$ ，则此时点 $A'$ 落在 $BC$ 边上.

$$\because \angle 3 = \angle 2, \therefore \angle 3 = \angle 1, \therefore BQ = A'Q,$$

$$\therefore F'Q = F'A' - A'Q = 4 - BQ.$$

在 $Rt\triangle BQF'$ 中，由勾股定理得： $BF'^2 + F'Q^2 = BQ^2$ ，

$$\text{即：} 3^2 + (4 - BQ)^2 = BQ^2,$$

$$\text{解得：} BQ = \frac{25}{8},$$

$$\therefore DQ = BD - BQ = \frac{25}{3} - \frac{25}{8} = \frac{125}{24};$$

③如答图3-3所示，点 $Q$ 落在 $BD$ 上，且 $PD=DQ$ ，易知 $\angle 3 = \angle 4$ 。

$$\because \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle 4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 2.$$

$$\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1.$$

$$\therefore \angle A'QB = \angle 4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1,$$

$$\therefore \angle A'BQ = 180^\circ - \angle A'QB - \angle 1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1,$$

$$\therefore \angle A'QB = \angle A'BQ,$$

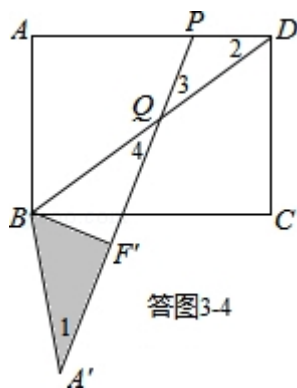
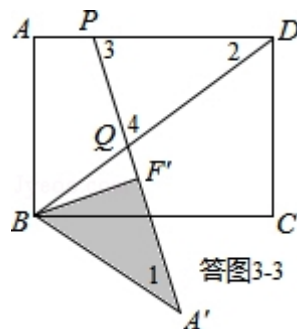
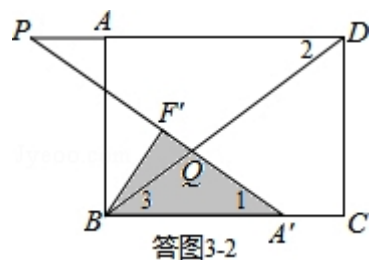
$$\therefore A'Q = A'B = 5,$$

$$\therefore F'Q = A'Q - A'F' = 5 - 4 = 1.$$

在 $Rt\triangle BF'Q$ 中，由勾股定理得： $BQ = \sqrt{F'Q^2 + F'B^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ，

$$\therefore DQ = BD - BQ = \frac{25}{3} - \sqrt{10};$$

④如答图3-4所示，点 $Q$ 落在 $BD$ 上，且 $PQ=PD$ ，易知 $\angle 2 = \angle 3$ 。



$$\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4,$$

$$\therefore BQ = BA' = 5,$$

$$\therefore DQ = BD - BQ = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}.$$

综上所述，存在 4 组符合条件的点  $P$ 、点  $Q$ ，使  $\triangle DPQ$  为等腰三角形；

$$DQ \text{ 的长度分别为 } 3\sqrt{10} - \frac{25}{3}, \frac{125}{24}, \frac{25}{3} - \sqrt{10} \text{ 或 } \frac{10}{3}.$$

2.如图，在矩形  $ABCD$  中， $AB=5, AD=4$ ,  $E$  为  $AD$  边上的一动点（不与点  $A$  重合）， $AF \perp BE$ ，垂足为  $F$ ， $GF \perp CF$ ，交

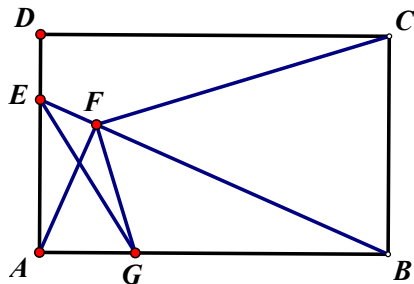
$AB$  于点  $G$ ，连接  $EG$ ，设  $AE = x$ ， $S_{\triangle BEG} = y$ ，

(1) 求证： $\angle AFG \sim \angle BFC$

(2) 求  $y$  与  $x$  的函数关系式，并求的最值

(3) 若  $\angle BFC$  为等腰三角形，请写出  $x$  的值。

证明：

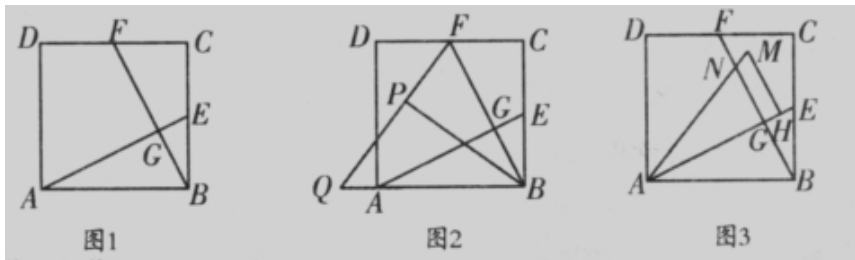


3. 如图 1，在正方形  $ABCD$  中， $E$ 、 $F$  分别为  $BC$ 、 $CD$  的中点，连接  $AE$ 、 $BF$ ，交点为  $G$ 。

(1) 求证： $AE \perp BF$ ；

(2) 将  $\triangle BCF$  沿  $BF$  对折，得到  $\triangle BPF$ （如图 2），延长  $FP$  交  $BA$  的延长线于点  $Q$ ，求  $\sin \angle BQP$  的值；

(3) 将  $\triangle ABE$  绕点  $A$  逆时针方向旋转，使边  $AB$  正好落在  $AE$  上，得到  $\triangle AHM$ （如图 3），若  $AM$  和  $BF$  相交于点  $N$ ，当正方形  $ABCD$  的面积为 4 时，求四边形  $GHMN$  的面积。



(1) 证明： $\because E$ 、 $F$  分别是正方形  $ABCD$  边  $BC$ 、 $CD$  的中点， $\therefore CF = BE$ ，

$$\therefore Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle BCF \quad \therefore \angle BAE = \angle CBF$$

又 $\because \angle BAE + \angle BEA = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle CBF + \angle BEA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BGE = 90^\circ$ ,  $\therefore AE \perp BF$

(2)根据题意得:  $FP = FC$ ,  $\angle PFB = \angle BFC$ ,  $\angle FPB = 90^\circ$ ,

$\because CD \parallel AB$ ,  $\therefore \angle CFB = \angle ABF$ ,  $\therefore \angle ABF = \angle PFB$ .  $\therefore QF = QB$

令  $PF = k$  ( $k > 0$ ), 则  $PB = 2k$ ,

在  $Rt\triangle BPQ$  中, 设  $QB = x$ ,  $\therefore x^2 = (x - k)^2 + 4k^2$ ,  $\therefore x = \frac{5}{2}k$ ,  $\therefore \sin \angle BQP = \frac{BP}{QP} = \frac{2k}{\frac{5k}{2}} = \frac{4}{5}$

(3)由题意得:  $\angle BAE = \angle EAM$ , 又  $AE \perp BF$ ,  $\therefore AN = AB = 2$ ,

$\because \angle AHM = 90^\circ$ ,  $\therefore GN \parallel HM$ ,  $\therefore \frac{\Delta AGN}{\Delta AHM} = \left(\frac{AN}{AM}\right)^2$   $\therefore \frac{\Delta AGN}{1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$

$\therefore$  四边形  $GHMN = S_{\Delta AHM} - S_{\Delta AGN} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

答: 四边形  $GHMN$  的面积是  $\frac{1}{5}$ .

4.已知矩形  $ABCD$  的一条边  $AD = 8$ , 将矩形  $ABCD$  折叠, 使得顶点  $B$  落在  $CD$  边上的  $P$  点处

(I) 如图 1, 已知折痕与边  $BC$  交于点  $O$ , 连接  $AP$ 、 $OP$ 、 $OA$ . 若  $\triangle OCP$  与  $\triangle PDA$  的面积比为 1: 4, 求边  $CD$  的长.

(II) 如图 2, 在 (I) 的条件下, 擦去折痕  $AO$ 、

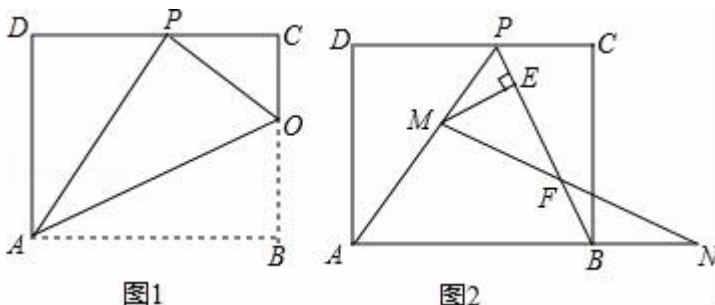


图1

图2

线段  $OP$ , 连接  $BP$ . 动点  $M$  在线段  $AP$  上 (点  $M$  与点  $P$ 、 $A$  不重合), 动点  $N$  在线段  $AB$  的延长线上, 且  $BN = PM$ , 连接  $MN$  交  $PB$  于点  $F$ , 作  $ME \perp BP$  于点  $E$ . 试问当动点  $M$ 、 $N$  在移动的过程中, 线段  $EF$  的长度是否发生变化? 若变化, 说明变化规律. 若不变, 求出线段  $EF$  的长度.

解: (1) 如图 1,  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore \angle C = \angle D = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ ,

$\because$  由折叠可得  $\angle APO = \angle B = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ ,

又 $\because \angle D = \angle C$ ,

$\therefore \triangle OCP \sim \triangle PDA$ ;

$\because \triangle OCP$  与  $\triangle PDA$  的面积比为 1: 4,

$$\therefore \frac{OP}{PA} = \frac{CP}{DA} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CP = \frac{1}{2}AD = 4,$$

设  $OP = x$ , 则  $CO = 8x$ ,

在  $Rt\triangle PCO$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,

由勾股定理得  $x^2 = (8x)^2 + 4^2$ ,

解得:  $x = 5$ ,

$$\therefore AB = AP = 2OP = 10,$$

$\therefore$  边  $CD$  的长为 10;

(2) 作  $MQ \parallel AN$ , 交  $PB$  于点  $Q$ , 如图 2,

$$\because AP = AB, MQ \parallel AN,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ABP = \angle MQP.$$

$$\therefore MP = MQ,$$

$$\because BN = PM,$$

$$\therefore BN = QM.$$

$$\because MP = MQ, ME \perp PQ,$$

$$\therefore EQ = \frac{1}{2}PQ.$$

$$\because MQ \parallel AN,$$

$$\therefore \angle QMF = \angle BNF,$$

在  $\triangle MFQ$  和  $\triangle NFB$  中,

$$\begin{cases} \angle QFM = \angle NFB \\ \angle QMF = \angle BNF \\ MQ = BN \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MFQ \cong \triangle NFB \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore QF = \frac{1}{2}QB,$$

$$\therefore EF = EQ + QF = \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{2}QB = \frac{1}{2}PB,$$

由 (1) 中的结论可得:  $PC = 4$ ,  $BC = 8$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,

$$\therefore PB = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}PB = 2\sqrt{5},$$

$\therefore$  在 (1) 的条件下, 当点  $M$ 、 $N$  在移动过程中, 线段  $EF$  的长度不变, 它的长度为  $2\sqrt{5}$ .

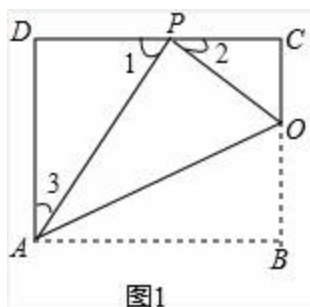


图1

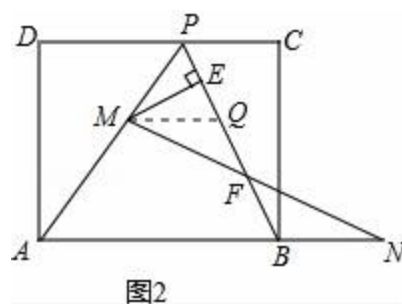


图2

5. 已知矩形  $ABCD$  的一条边  $AD=8$ ，将矩形  $ABCD$  折叠，使得顶点  $B$  落在  $CD$  边上的  $P$  点处。

(1) 如图 1，已知折痕与边  $BC$  交于点  $O$ ，连结  $AP$ 、 $OP$ 、 $OA$ 。

① 求证： $\triangle OCP \sim \triangle PDA$ ；

② 若  $\triangle OCP$  与  $\triangle PDA$  的面积比为 1:4，求边  $AB$  的长；

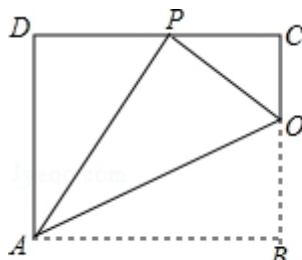


图1

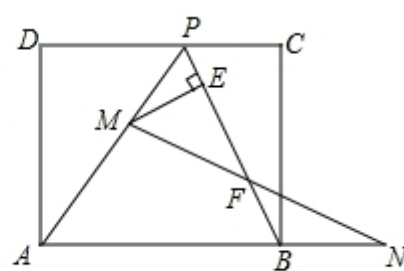


图2

(2) 若图 1 中的点  $P$  恰好是  $CD$  边的中点，求  $\angle OAB$  的度数；

(3) 如图 2，在 (1) 的条件下，擦去折痕  $AO$ 、线段  $OP$ ，连结  $BP$ 。动点  $M$  在线段  $AP$  上（点  $M$  与点  $P$ 、 $A$

不重合），动点  $N$  在线段  $AB$  的延长线上，且  $BN=PM$ ，连结  $MN$  交  $PB$  于点  $F$ ，作  $ME \perp BP$  于点  $E$ 。试问当点  $M$ 、 $N$  在移动过程中，线段  $EF$  的长度是否发生变化？若变化，说明理由；若不变，求出线段  $EF$  的长度。

解：(1) 如图 1，

①  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形， $\therefore AD=BC$ ， $DC=AB$ ， $\angle DAB=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$ 。

由折叠可得： $AP=AB$ ， $PO=BO$ ， $\angle PAO=\angle BAO$ ， $\angle APO=\angle B$ 。

$\therefore \angle APO=90^\circ$ 。

$\therefore \angle APD=90^\circ-\angle CPO=\angle POC$ 。

$\because \angle D=\angle C$ ， $\angle APD=\angle POC$ 。

$\therefore \triangle OCP \sim \triangle PDA$ 。

②  $\because \triangle OCP$  与  $\triangle PDA$  的面积比为 1:4，

$$\therefore \frac{OC}{PD} = \frac{OP}{PA} = \frac{CP}{DA} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore PD=2OC$ ， $PA=2OP$ ， $DA=2CP$ 。

$\because AD=8$ ， $\therefore CP=4$ ， $BC=8$ 。

设  $OP=x$ ，则  $OB=x$ ， $CO=8-x$ 。

在  $Rt\triangle PCO$  中，

$\because \angle C=90^\circ$ ， $CP=4$ ， $OP=x$ ， $CO=8-x$ ，

$$\therefore x^2 = (8-x)^2 + 4^2.$$

解得： $x=5$ 。

$\therefore AB=AP=2OP=10$ 。

$\therefore$  边  $AB$  的长为 10。

(2) 如图 1，

$\because P$  是  $CD$  边的中点，

2017年广东省中考数学

$$\therefore DP = \frac{1}{2}DC.$$

$$\because DC=AB, AB=AP,$$

$$\therefore DP = \frac{1}{2}AP.$$

$$\because \angle D=90^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle DAP = \frac{DP}{AP} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \angle DAP=30^\circ.$$

$$\because \angle DAB=90^\circ, \angle PAO=\angle BAO, \angle DAP=30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB=30^\circ.$$

$$\therefore \angle OAB \text{ 的度数为 } 30^\circ.$$

(3) 作  $MQ \parallel AN$ , 交  $PB$  于点  $Q$ , 如图 2.

$$\because AP=AB, MQ \parallel AN,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ABP, \angle ABP = \angle MQP.$$

$$\therefore \angle APB = \angle MQP.$$

$$\therefore MP=MQ.$$

$$\because MP=MQ, ME \perp PQ,$$

$$\therefore PE=EQ = \frac{1}{2}PQ.$$

$$\because BN=PM, MP=MQ,$$

$$\therefore BN=QM.$$

$$\because MQ \parallel AN,$$

$$\therefore \angle QMF = \angle BNF.$$

在  $\triangle MFQ$  和  $\triangle NFB$  中,

$$\begin{cases} \angle QMF = \angle BNF \\ \angle QFM = \angle BFN \\ QM = BN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MFQ \cong \triangle NFB.$$

$$\therefore QF=BF.$$

$$\therefore QF = \frac{1}{2}QB.$$

$$\therefore EF = EQ + QF = \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{2}QB = \frac{1}{2}PB.$$

由 (1) 中的结论可得:

$$PC=4, BC=8, \angle C=90^\circ.$$

$$\therefore PB = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}PB = 2\sqrt{5}.$$

$\therefore$  在 (1) 的条件下, 当点  $M$ 、 $N$  在移动过程中, 线段  $EF$  的长度不变, 长度为  $2\sqrt{5}$ .

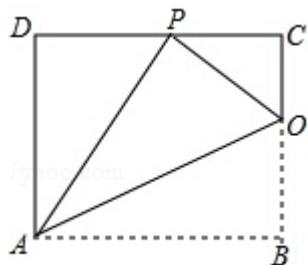


图1

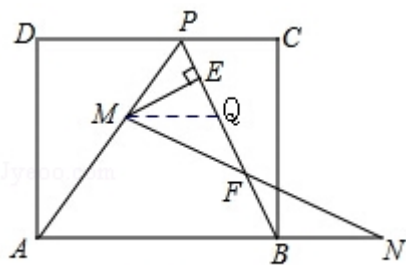


图2

6. 如图， $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=40^\circ$ ，将 $\triangle ABC$  绕点  $A$  按逆时针方向旋转  $100^\circ$ ，得到 $\triangle ADE$ ，连接  $BD$ ， $CE$  交于点  $F$ 。

- (1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ；
- (2) 求 $\angle ACE$  的度数；
- (3) 求证：四边形  $ABEF$  是菱形。

(1) 证明： $\because \triangle ABC$  绕点  $A$  按逆时针方向旋转  $100^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 100^\circ,$$

又 $\because AB=AC$ ，

$$\therefore AB=AC=AD=AE,$$

在 $\triangle ABD$  与 $\triangle ACE$  中

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE \\ AD=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)}.$$

(2) 解： $\because \angle CAE=100^\circ$ ， $AC=AE$ ，

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle CAE) = \frac{1}{2} (180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ;$$

(3) 证明： $\because \angle BAD = \angle CAE = 100^\circ$ ， $AB=AC=AD=AE$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \angle ACE = \angle AEC = 20^\circ.$$

$$\because \angle BAE = \angle BAD + \angle DAE = 160^\circ,$$

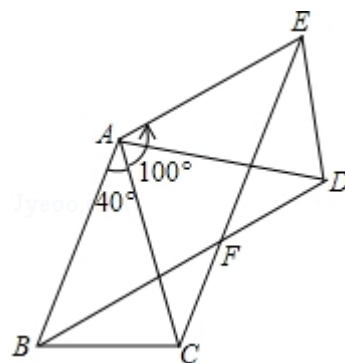
$$\therefore \angle BFE = 360^\circ - \angle DAE - \angle ABD - \angle AEC = 160^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BFE,$$

$\therefore$  四边形  $ABEF$  是平行四边形，

$$\because AB=AE,$$

$\therefore$  平行四边形  $ABEF$  是菱形。



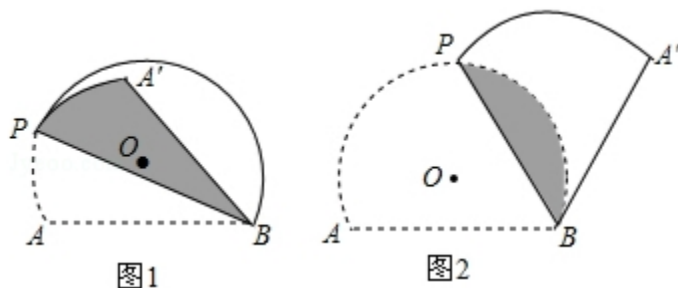


7.图1和图2中,优弧 $\widehat{AB}$ 所在 $\odot O$ 的半径为2,  $AB=2\sqrt{3}$ . 点 $P$ 为优弧 $\widehat{AB}$ 上一点(点 $P$ 不与 $A, B$ 重合), 将图形沿 $BP$ 折叠, 得到点 $A$ 的对称点 $A'$ .

(1) 点 $O$ 到弦 $AB$ 的距离是 1, 当 $BP$ 经过点 $O$ 时,  $\angle ABA' =$  60  $^\circ$ ;

(2) 当 $BA'$ 与 $\odot O$ 相切时, 如图2, 求折痕的长;

(3) 若线段 $BA'$ 与优弧 $\widehat{AB}$ 只有一个公共点 $B$ , 设 $\angle ABP = \alpha$ . 确定 $\alpha$ 的取值范围.



解: (1) ①过点 $O$ 作 $OH \perp AB$ , 垂足为 $H$ , 连接 $OB$ , 如图1①所示.

$$\because OH \perp AB, AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AH = BH = \sqrt{3}.$$

$$\because OB = 2,$$

$$\therefore OH = 1.$$

$\therefore$  点 $O$ 到 $AB$ 的距离为1.

②当 $BP$ 经过点 $O$ 时, 如图1②所示.

$$\because OH = 1, OB = 2, OH \perp AB,$$

$$\therefore \sin \angle OBH = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \angle OBH = 30^\circ.$$

由折叠可得:  $\angle A'BP = \angle ABP = 30^\circ$ .

$$\therefore \angle ABA' = 60^\circ.$$

故答案为: 1、60.

(2) 过点 $O$ 作 $OG \perp BP$ , 垂足为 $G$ , 如图2所示.

$\because BA'$ 与 $\odot O$ 相切,

$$\therefore OB \perp A'B.$$

$$\therefore \angle OBA' = 90^\circ.$$

$$\because \angle OBH = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABA' = 120^\circ.$$

$$\therefore \angle A'BP = \angle ABP = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle OBP = 30^\circ.$$

$$\therefore OG = \frac{1}{2}OB = 1.$$

$$\therefore BG = \sqrt{3}.$$

$$\because OG \perp BP,$$

$$\therefore BG = PG = \sqrt{3}.$$

$$\therefore BP = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{折痕的长为 } 2\sqrt{3}.$$

(3) 若线段  $BA'$  与优弧  $\widehat{AB}$  只有一个公共点  $B$ ,

I. 当点  $A'$  在  $\odot O$  的内部时, 此时  $\alpha$  的范围是  $0^\circ < \alpha < 30^\circ$ .

II. 当点  $A'$  在  $\odot O$  的外部时, 此时  $\alpha$  的范围是  $60^\circ \leq \alpha < 120^\circ$ .

综上所述: 线段  $BA'$  与优弧  $\widehat{AB}$  只有一个公共点  $B$  时,  $\alpha$  的取值范围是  $0^\circ < \alpha < 30^\circ$  或  $60^\circ \leq \alpha < 120^\circ$ .